Übung ganzrat. Funktionen

a) Nullstellen

Ansatz: $f(x) = 0$

$$\frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{6}x^2 - 2x = 0$$

$\rightsquigarrow$ GTR: $x_1 \approx -3{,}56$

$x_2 = 0$ ← Stellen

$x_3 \approx 5{,}1$

y-Achsenabschnitt

$$f(0) = \frac{1}{9} \cdot 0^3 - \frac{1}{6} \cdot 0^2 - 2 \cdot 0 = 0$$

Also:

$N_1(-3{,}56 \mid 0)$

$N_2(0 \mid 0)$ $(= P)$

$N_3(5{,}1 \mid 0)$

$P(0 \mid 0)$

b) Extrempunkte

$$f'(x) = \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3}x - 2$$

notwendiges Krit.: $f'(x) = 0$

hinreichendes Krit.: $f'(x) = 0$ und VZW an den kritischen Stellen in f'

notwendiges Krit.:

$$0 = \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3}x - 2 \quad | \cdot 3$$

$$0 = x^2 - x - 6$$

$$x_{1,2} = -\frac{-1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-1}{2}\right)^2 - (-6)}$$

$$= \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 6}$$

$$= \frac{1}{2} \pm \sqrt{6{,}25}$$

$$= \frac{1}{2} \pm 2{,}5$$

$$\Rightarrow x_1 = -2, \quad x_2 = 3$$

hinreichendes Krit.:

Stelle x	-3	-2	-1	2	3	4
$f'(x)$	2	0	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{4}{3}$	0	2
Verlauf der Tangente	$\nearrow$	$\rightarrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\rightarrow$	$\nearrow$

$\Rightarrow$ HP $\qquad\qquad \Rightarrow$ TP

lokaler HP bei $x = -2$: $HP(-2 \mid f(-2))$
$= HP(-2 \mid 22/9)$

lokaler TP bei $x = 3$: $TP(3 \mid f(3))$
$= TP(3 \mid -9/2)$

Globale Hoch- und Tiefpunkte:

Der Graph der Funktion f besitzt keine globalen Extrempunkte, weil er dasselbe Globalverhalten wie der Graph der Potenzfunktion $g(x) = \frac{1}{9}x^3$ aufweist.

ungerades Exponent

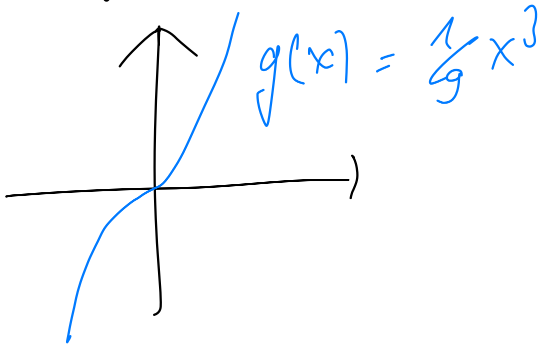
positiver Vorfaktor / Koeffizient

Es gilt damit:

Für $x \to \infty$ gilt: $f(x) \to \infty$

Für $x \to -\infty$ gilt: $f(x) \to -\infty$

Erinnerung:



c) Monotonie:

$\Rightarrow$ verwende die Tabelle aus b

Es gilt: f streng mon. fallend $\Leftrightarrow f'(x) < 0$

f streng mon steigend $\Leftrightarrow f'(x) > 0$

Also:

Intervalle:

$(-\infty, -2)$: streng mon. steigend
$(-2, 3)$: " " fallend
$(3, \infty)$: " " steigend

oder:

$(-\infty, -2]$: mon steigend
$[-2, 3]$: " fallend
$[3, \infty)$: " steigend

d) Tangentengleichung bei $x = 4$

$\rightarrow$ Bestimme P: $f(4) = -\frac{32}{9}$

$\Rightarrow P(4 \mid -\frac{32}{9})$

Bestimme die Steigung für den Ansatz
$y = mx + b$

Es gilt: $m = f'(x_0)$, also: $m = f'(4) = 2$

Also: $-\frac{32}{9} = 2 \cdot 4 + b \quad | -8$

$\Leftrightarrow -\frac{104}{9} = b$

Tangentengleichung: $t(x) = y = 2x - \frac{104}{9}$

e) Normale an der Stelle $x_0 = 1{,}425$

$\rightsquigarrow$ GTR: $y = 0{,}5561x - 3{,}6594$

(Graph $\to$ Sketch $\to$ Norm $\to$ x_0 eingeben)

– Ende –