Monotonie

(Streng) Monoton steigend

Wenn für alle x aus einem Intervall $f'(x) > 0$ gilt, dann ist f auf dem Intervall **streng monoton steigend**. Gilt stattdessen nur $f'(x) \geq 0$, so ist f nur **monoton steigend**.

(Streng) Monoton fallend

Wenn für alle x aus einem Intervall $f'(x) < 0$ gilt, dann ist f auf dem Intervall **streng monoton steigend**. Gilt stattdessen nur $f'(x) \leq 0$, so ist f nur **monoton fallend**.

Vorgehen: Setze $f'(x) = 0$, um die Intervallgrenzen zu bestimmen.

Tipp: Die Nullstellen von f' wurden bei den Hoch- und Tiefpunkten schon bestimmt!

Globalverhalten

Ganzrationale Funktion – Definition:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

Verhalten im Unendlichen

Der Graph verläuft im Unendlichen, also für $x \to +/- \infty$, wie der Graph der **Potenzfunktion** $p(x) = a_n x^n$.

Achtung: Auf das Vorzeichen von a_n achten!

Verhalten nahe x = 0

Der Graph verläuft nahe $x = 0$ wie der Graph der **Geraden** $g(x) = a_1 x + a_0$.

Achtung: Auf das Vorzeichen von a_1 achten!

Tangente an Graphen

$$t(x) = y = mx + b$$

Gegeben: Funktion f und die Stelle x_0 des Berührpunktes

1. – Bestimme Berührpunkt

Berechne $f(x_0)$, um die y-Koordinate des Berührpunktes P zu bestimmen.
Somit gilt: $P(x_0 \mid f(x_0))$ liegt auf d. Graphen von f

2. – Bestimme Steigung der T.

Es gilt: $m = f'(x_0)$
Berechne also $f'(x)$ und setze x_0 in f' ein.

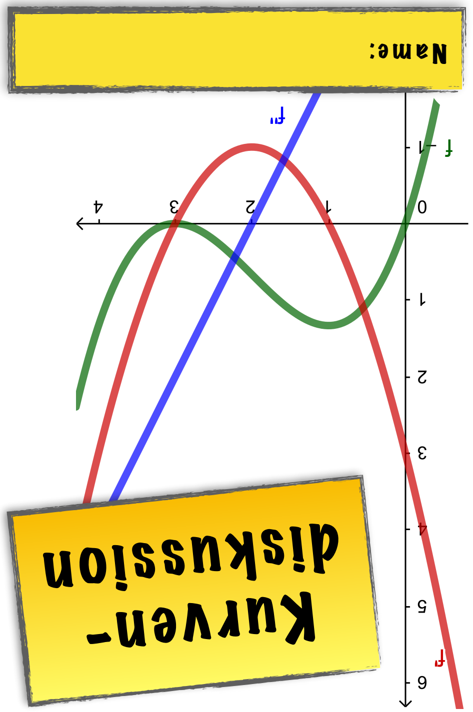
3. – Bestimme y-Achsenabschnitt

Setze den Wert für m und den Berührpunkt in $y = mx + b$ ein und löse nach b auf.

4. – Gib Tangentengleichung an

Gib $t(x) = y = mx + b$ an.

v3 – Stroick – stroick.net



Nullstellen

$$f(x) = 0$$

Erklärung:
Gesucht sind die x-Stellen, an denen die Funktionswerte den Wert 0 annehmen, der Graph also die x-Achse schneidet.

Verfahren:
- Faktorisieren (x ausklammern)
- pq-Formel für quadratische Gleichungen
- Substitution für biquadratische Gleichungen
- Verfahren kombinieren bzw. GTR nutzen

y-Achsenabschnitt

Berechne f(0)
Es gilt: $f(0) = a_0$

Erklärung:
Gesucht ist die Stelle auf der y-Achse an dem der Graph von f die y-Achse schneidet.

Symmetrie

1. Achsensymmetrie zur y-Achse

$$f(x) = f(-x)$$

Sind alle Exponenten von x in der Funktionsvorschrift von f **gerade**, so ist der Graph von f achsensymmetrisch zur y-Achse.

Beispiel: $f(x) = -4x^6+6x^4+3x^2+2$

2. Punktsymmetrie zum Ursprung

$$-f(x) = f(-x)$$

Sind alle Exponenten von x in der Funktionsvorschrift von f **ungerade**, so ist der Graph von f punktsymmetrisch zum Ursprung.

Beispiel: $f(x) = 4x^7+6x^5+3x$

Lokale Extrema

1. notwendiges Kriterium

$$f'(x_0) = 0$$

(x_0 – also die Nullstellen der 1. Ableitung – bezeichnet man als **kritische Stellen**)

2. hinreichendes Kriterium

$f'(x_0) = 0$ und VZW in der ersten Ableitung an den kritischen Stellen

VZW: Setze Stellen links und rechts neben einer kritischen Stelle in f' ein – dabei darauf achten, dass keine kritische Stelle übersprungen wird!

VZW:

+ nach –	=	Hochpunkt bei x_0
– nach +	=	Tiefpunkt bei x_0
+ nach +	=	Sattelpunkt bei x_0
– nach –	=	Sattelpunkt bei x_0

Globale Extrema

Ein Extremum an der Stelle x_0 ist dann **global**, wenn für alle x aus dem Definitionsbereich gilt, dass…

…$f(x) \leq f(x_0)$ gilt
(dann: **globales Maximum** bei x_0)

…oder $f(x) \geq f(x_0)$ gilt
(dann: **globales Minimum** bei x_0)

Vorsicht: Sind Funktionen abschnittsweise definiert (also bspw. auf dem Intervall [6, 12], d. h. für $6 \leq x \leq 12$), dann muss bei der Hoch- und Tiefpunktberechnung eine **Randwertuntersuchung** durchgeführt werden.

(Globale) Extrema können am Rand liegen!